

演習問題集5年下第15回・くわしい解説

目 次

ステップ①	1	…p.2
ステップ①	2	…p.3
ステップ①	3	…p.4
ステップ①	4	…p.5
ステップ②	1	…p.6
ステップ②	2	…p.11
ステップ②	3	…p.12
ステップ②	4	…p.13
ステップ②	5	…p.14
ステップ③	1	…p.15
ステップ③	2	…p.16
ステップ③	3	…p.17
ステップ③	4	…p.19
ステップ③	5	…p.21

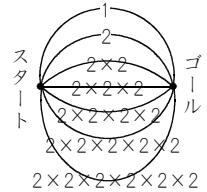
すぐる学習会

<https://www.suguru.jp>

ステップ① 1

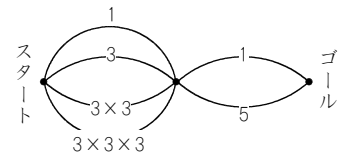
- (1)① 64 を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ です。

右の図のようになるので、約数は **7** 個あります。



- ② 135 を素因数分解すると、 $3 \times 3 \times 3 \times 5$ です。

右の図のようになるので、約数は $4 \times 2 =$ **8** (個) あります。



- (2) A と 56 の最大公約数は 14 なので、右のような図になり、最小公倍数は左と下のかけ算なので、 $14 \times \text{ア} \times \text{イ} = 392$ です。

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) \text{ア} \quad 56} \\ \underline{\text{ア} \quad \text{イ}} \end{array}$$

イは、 $56 \div 14 = 4$ ですから、 $\text{ア} = 392 \div 14 \div \text{イ} = 392 \div 14 \div 4 = 7$ です。

$\text{A} \div 14 = 7$ ですから、 $\text{A} = 7 \times 14 =$ **98** です。

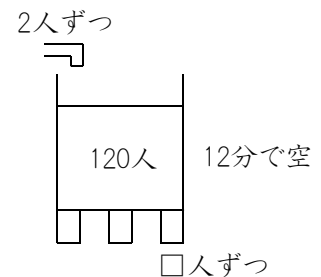
- (3) 1 辺 10 cm の立方体のおもりを完全にしずめたのですから、 $10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ (cm}^3\text{)}$ のおもりをしずめました。

おもりをしずめたことによって、水の深さは 15 cm から 19 cm になったので、 $19 - 15 = 4 \text{ (cm)}$ 上がりました。

よって、底面積 $\times 4 = 1000$ ですから、底面積は、 $1000 \div 4 =$ **250** (cm²) です。

- (4) 右のような水そう図を書いて整理しましょう。

1 つの窓口から毎分 $\square$ 人の割合で受付をしたとすると、3 つの窓口では、毎分 $(\square \times 3)$ 人の割合で受付をすることになります。



行列には毎分 2 人ずつ人が加わりますから、毎分 $(\square \times 3 - 2)$ 人ずつ行列が少なくなります。

120 人の行列がなくなるのは、「 $120 \div (\square \times 3 - 2)$ 」分後です。

実際には 12 分後になるのですから、 $120 \div (\square \times 3 - 2) = 12$ となり、あとは逆算です。

$120 \div 12 = 10$ $10 + 2 = 12$ $12 \div 3 = 4$ ですから、毎分 **4** 人の割合で受付をしました。

ステップ① 2

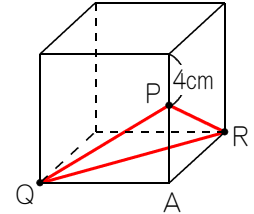
- (1) 切り口の図形は、右の図のようになります。

A をふくむ立体は三角すいで、底面は三角形 Q A R です。

底面積は、 $10 \times 10 \div 2 = 50 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

この三角すいの高さは P A ですから、 $10 - 4 = 6 \text{ (cm)}$ です。

よって、この三角すいの体積は、 $50 \times 6 \times \frac{1}{3} = 100 \text{ (cm}^3\text{)}$ です。

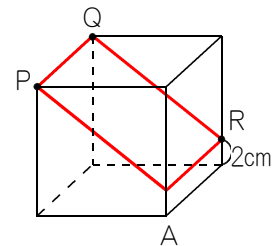


- (2) 切り口の図形は、右の図のようになります。

A をふくむ立体は四角柱で、底面は立方体の前の面にある台形です。

底面である台形の面積は、 $(10 + 2) \times 10 \div 2 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

高さは P Q にあたるので 10 cm ですから、この四角柱の体積は、 $60 \times 10 = 600 \text{ (cm}^3\text{)}$ です。



ステップ① 3

- (1) A 1 人ですると 48 分かかり, B 1 人ですると 1 時間 20 分 = 80 分かかるのですから, 仕事全体を, 48 と 80 の最小公倍数である 240 に決めます。

A 1 人ですると 240 の仕事を 48 分かかるのですから, 1 分あたり $240 \div 48 = 5$ ずつ仕事をします。

B 1 人ですると 240 の仕事を 80 分かかるのですから, 1 分あたり $240 \div 80 = 3$ ずつ仕事をします。

A と B の 2 人ですると, $5 + 3 = 8$ ずつ仕事をするので, 全体である 240 の仕事を, $240 \div 8 = 30$ (分) かかることになります。

- (2) (1)で, 右の表のように整理することができます。

全体 = 240
A 1 分 = 5 ずつ
B 1 分 = 3 ずつ

(2)では, A ははじめから最後まで 39 分間ずっと仕事をしました。

A は 1 分に 5 ずつ仕事をするので, 39 分では, $5 \times 39 = 195$ のをしました。

B は残りの仕事である, $240 - 195 = 45$ の仕事をしました。

B は 1 分に 3 ずつ仕事をするので, 45 の仕事を, $45 \div 3 = 15$ (分) でした。

- (3) (1)で, 右の表のように整理することができます。

全体 = 240
A 1 分 = 5 ずつ
B 1 分 = 3 ずつ

(3)では, A が途中で 8 分休みました。

もし A が 8 分休んでいなかったら, 全体の仕事量である 240 よりも, もっと多くの仕事をする事ができていたはずで。

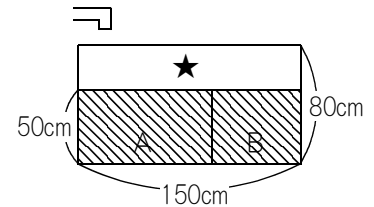
A は 1 分あたり 5 ずつ仕事をするのですから, 8 分では, $5 \times 8 = 40$ の仕事をします。

よって A が 8 分休んでいなかったら, 全体の仕事量は 240 ではなく, $240 + 40 = 280$ の仕事をする事ができていたはずで。

280 の仕事を, A と B の 2 人でするので, 全部で $280 \div (5 + 3) = 35$ (分) かかりました。

ステップ① 4

- (1) グラフを見ると， x 分のときに右の図のしゃ線部分まで水が入り，32 分のときに 80 cm の深さまで水が入ったことがわかります。

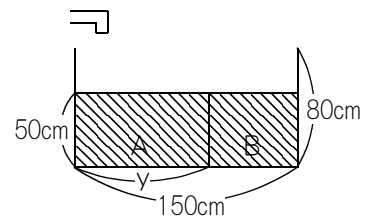


しゃ線部分と★の部分の体積の比は $50 : (80 - 50) = 5 : 3$ ですから，水が入るのにかかる時間の比も $5 : 3$ です。

全部で 32 分かかったのですから，しゃ線部分に水が入るのに， $32 \div (5 + 3) \times 5 = 20$ (分) かかります。

よって， x は **20** になります。

- (2) (1)で，右の図のしゃ線部分に水が入るのに 20 分かかることがわかりました。



グラフを見ると，A の部分には 12 分で水が入るので，B の部分には， $20 - 12 = 8$ (分) で水が入ります。

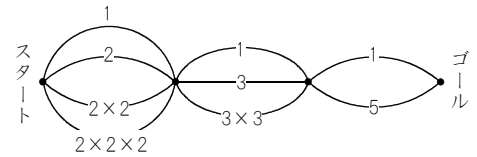
$A : B = 12 : 8 = 3 : 2$ ですから，A と B の横の長さの比も $3 : 2$ になります。

よって y は， $150 \div (3 + 2) \times 3 = \mathbf{90}$ (cm) です。

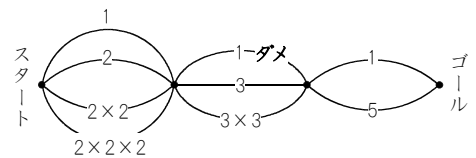
ステップ② 1 (1)

360 を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ です。

右の図のような通り道になります。



約数が3の倍数になるためには、「3の道」、あるいは「 3×3 」の道を通らなければならないので、右の図の「ダメ」と書いてある道を通ってはいけません。



「ダメ」と書いてある道以外を通してスタートからゴールまで進んだら、約数は3の倍数になります。

2に関係する道は4本、3に関係する道で「ダメ」以外は2本、5に関係する道は2本ですから、答えは $4 \times 2 \times 2 = 16$ (個) です。

ステップ② 1 (2)

A と B の最大公約数が 4 で， A と B の和が 40 ですから，
右の連除法のアとイの和は， $40 \div 4 = 10$ です。

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) A + B} = 40 \\ \text{ア} \quad \text{イ} \end{array}$$

A は B より大きいのでアはイより大きく， (ア, イ) = (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 4) が考えられます。

(9, 1) のときは $\begin{array}{r} 4 \overline{) A \quad B} \\ 9 \quad 1 \end{array}$ となり， $A = 9 \times 4 = 36$ ， $B = 1 \times 4 = 4$ です。

(8, 2) のときは $\begin{array}{r} 4 \overline{) A \quad B} \\ 8 \quad 2 \end{array}$ となり， 8 も 2 もまだ 2 でわれるので， 最大公約数が 4 ではなくなるのでダメです。

(7, 3) のときは $\begin{array}{r} 4 \overline{) A \quad B} \\ 7 \quad 3 \end{array}$ となり， $A = 7 \times 4 = 28$ ， $B = 3 \times 4 = 12$ です。

(6, 4) のときは $\begin{array}{r} 4 \overline{) A \quad B} \\ 6 \quad 4 \end{array}$ となり， 6 も 4 もまだ 2 でわれるので， 最大公約数が 4 ではなくなるのでダメです。

よって， 答えとして考えられる (A, B) は， **(36, 4)** と **(28, 12)** です。

ステップ② 1 (3)

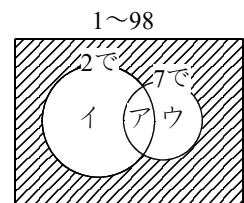
この問題の解き方は3種類あり、

- ①ベン図を利用する ②最小公倍数を利用する ③びっくり公式を利用する

どの解き方にしても、98を素因数分解して、 $2 \times 7 \times 7$ とします。
素因数分解の中に出てくる数は、2と7です。

①ベン図を利用する

右の図のしゃ線部分の個数を求めればOKです。



アは、2と7の最小公倍数である14でわり切れる部分ですから、
 $98 \div 14 = 7$ (個)あります。

2でわり切れる数は、 $98 \div 2 = 49$ (個)ありますから、イは $49 - 7 = 42$ (個)です。

7でわり切れる数は、 $98 \div 7 = 14$ (個)ありますから、ウは $14 - 7 = 7$ (個)です。

よって、(ア+イ+ウ)の部分は $7 + 42 + 7 = 56$ (個)ですから、しゃ線部分の個数は、
 $98 - 56 = 42$ (個)あることがわかりました。

②最小公倍数を利用する

2と7の最小公倍数は14ですから、14までの中に2でも7でもわり切れない整数が何個あるかを求めます。

14までの中に、1, 3, 5, 9, 11, 13の6個が2でも7でもわり切れません。

98までの中では、 $98 \div 14 = 7$ (セット)ありますから、 $6 \times 7 = 42$ (個)になります。

③ 次のようなびっくり公式があります。

分母を素因数分解すると2, 7が登場するときは、

$$\text{最大公約数が1である整数の個数} = 98 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right)$$

素因数分解したときに登場する数によって、公式を変えます。

$$\text{よって、} 98 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 98 \times \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = 42 \text{ (個) となります。}$$

ステップ② 1 (4)

まず，次のような超簡単な問題から解説します。

問題

10570000000 は，一の位から連続して「0」が何個ならびますか。

単純に一の位から並んでいる 0 の数をかぞえればよいので，答えは 7 個になります。
では，次の問題ははどうでしょう。

問題

10570000000 は，10 で何回わり切れますか。

10 で 1 回ずつわっていくと，右はしの 0 が 1 個ずつなくなっていくので，7 回われば 1057 となり，それ以上わり切れなくなります。よって，答えは 7 回です。

つまり，「一の位から連続して 0 が何個ならびますか。」という問題は，
「10 で何回わり切れますか。」という問題と，同じことになります。

さて，「10 でわる」というのは， $10 = 2 \times 5$ ですから，「2 でわって，さらに 5 でわる。」
ことと同じです。

たとえば，3628800 という数が，2 で 8 回わり切れて，5 で 2 回わり切れることがわか
っているとします。

次のようなイメージです。

3628800 — $\begin{cases} 2 \text{ で} \cdots \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & (8 \text{ 回}) \\ 5 \text{ で} \cdots \bigcirc \bigcirc & (2 \text{ 回}) \end{cases}$

それでは，3628800 という数は，「2 でわって，さらに 5 でわる」ということを，何回
できるでしょうか。

実は，2 回しかできません。

まず 1 回目，2 でわって 5 でわると，次のようになります。

3628800 — $\begin{cases} 2 \text{ で} \cdots \times \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & (\text{あと } 7 \text{ 回}) \\ 5 \text{ で} \cdots \times \bigcirc & (\text{あと } 1 \text{ 回}) \end{cases}$

もう一度，2 でわって 5 でわると，次のようになります。

3628800 — $\begin{cases} 2 \text{ で} \cdots \times \times \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & (\text{あと } 6 \text{ 回}) \\ 5 \text{ で} \cdots \times \times & (\text{あと } 0 \text{ 回}) \end{cases}$

(次のページへ)

つまり、いくら2でわることが多く残っていたとしても、もう5でわることが不可能なので、「2でわって、さらに5でわる」ことは、2回しかできません。

ようするに、「2でわって、さらに5でわる」ことは、「2でわり切れる回数」と、「5でわり切れる回数」のうち、少ない回数の方しかできないことになります。

では、 $A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 24 \times 25$ について、考えてみましょう。

Aが2で何回わるかは、(1)の問題と同様に計算することができます。

$$\begin{array}{l} 25 \div 2 = 12 \text{ あまり } 1 \\ 12 \div 2 = 6 \\ 6 \div 2 = 3 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ あまり } 1 \end{array}$$

合計、 $12 + 6 + 3 + 1 = 22$ (回)、2でわることができます。

次に、Aが5で何回わるかを、求めてみましょう。

$$\begin{array}{l} 25 \div 5 = 5 \\ 5 \div 5 = 1 \end{array}$$

合計、 $5 + 1 = 6$ (回)、5でわることができます。

結局、Aは2で22回、5で6回、わることができました。

「2でわって、さらに5でわる」ことは、少ない回数の方しかできないので、6回しかできません。

よって、Aは一の位から連続して「0」が6個ならんでいることがわかりました。

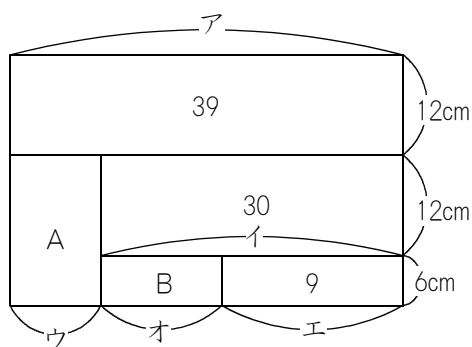
ところで、答えを求めるときに、「2で何回わるか」と、「5で何回わるか」の、両方を計算して、少ない方である「5で何回わるか」の回数の方を答えにしました。

しかし、この問題のような、「 $1 \times 2 \times \cdots \times N$ 」の0がならぶ個数を求める問題の場合は、いつも必ず「2でわれる回数」よりも「5でわれる回数」の方が少ないので、「2でわれる回数」を求めることはしなくてOKです。

この問題の解き方を整理すると、右の図のようになります。

0が何個ならぶか
||
10で何回わるか
||
2と5で何回わるか
||
5で何回わるか

A の体積は 13.5 で、B の体積は 6 ですから、A と B の体積の比は、 $13.5 : 6 = 9 : 4$ です。



ステップ② 3

(1) 1 台のポンプは毎分2 L の割合で水をくみ出します。

1 台のポンプで1 時間 = 60 分くみ出すと、 $2 \times 60 = 120$ (L) の水をくみ出します。

はじめの水の量と、60 分でわき出てきた水の量の合計が、120 L です。

はじめ + 60 分でわき出す量 = 120 L

 …(ア)

2 台のポンプで20 分くみ出すと、 $2 \times 2 \times 20 = 80$ (L) の水をくみ出します。

はじめの水の量と、20 分でわき出てきた水の量の合計が、80 L です。

はじめ + 20 分でわき出す量 = 80 L

 …(イ)

(ア)と(イ)をくらべると、 $60 - 20 = 40$ (分)で、 $120 - 80 = 40$ (L)がわき出るのですから、1 分あたり、 $40 \div 40 = 1$ (L)ずつ水がわき出ることになります。

(2) (1)で、泉は毎分1 L の割合で水がわき出ていることがわかりました。

(1)の(ア)は

はじめ + 60 分でわき出す量 = 120 L

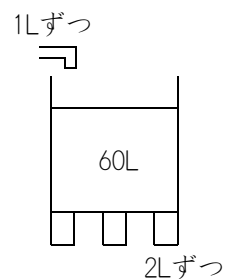
 でしたが、毎分1 L の割合で

水がわき出るので、60 分では $1 \times 60 = 60$ (L)の水がわき出ます。

よってはじめの泉の水の量は、 $120 - 60 = 60$ (L)です。

1 台のポンプでは毎分2 L の割合で水をくみ出すので、3 台のポンプでは、 $2 \times 3 = 6$ (L)ずつ水をくみ出します。

毎分1 L の割合で水がわき出ているのですから、1 分あたり、 $6 - 1 = 5$ (L)ずつ水がへって行って、 $60 \div 5 = 12$ (分)で泉は空になります。



ステップ② 4

Pは辺ABの真ん中の点なので、APもBPも、
 $4 \div 2 = 2(\text{cm})$ です。

PからRは上の面を通っているので線を書いてよく、
 RからQも右の面を通っているので線を書いてOKです。

PからQは直方体の内部を通っている所以線を書いてはいけません。

RQの「たて：横」は、3：4です。

よって、右のようにPSという切り口の線を書いたとき、
 PSは左の面にあるので、右の面にあるRQと平行になります。

したがって、PSの「たて：横」も、やはり3：4になるので、ASの長さは、
 $2 \div 4 \times 3 = 1.5(\text{cm})$ です。

SからQは前の面を通っている所以線を書いてOKです。

切り口の線によって切り分けられた2つの立体のうち、
 Aをふくむ方の立体は、「三角すい台」になります。

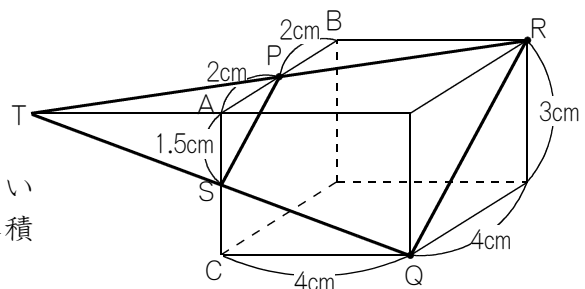
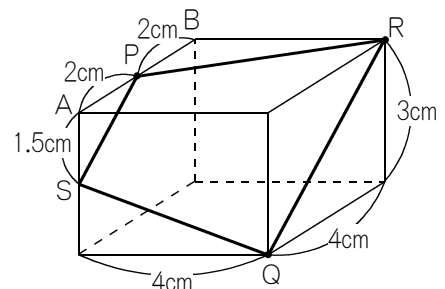
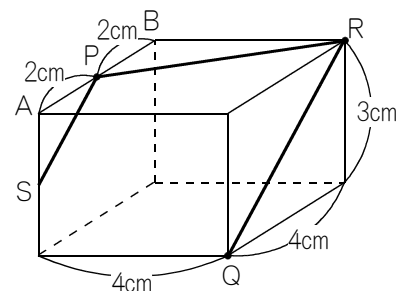
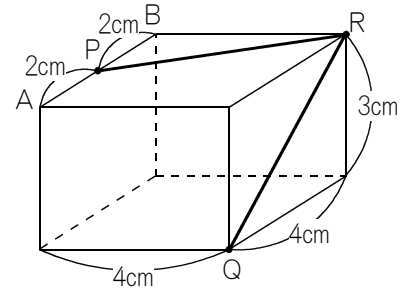
右の図のように線をのばすと、大きい三角すいができます。

Aをふくむ方の立体の体積は、大きい三角すいから小さい三角すいTASPを引いた残りの体積になります。

ASTとCSQは合同なので、TAの長さはQCの長さと同じ4cmです。

よって、Aをふくむ三角すい台の体積は、
 大きい三角すい－小さい三角すいTASP

$$\begin{aligned}
 &= 4 \times 3 \div 2 \times (4 + 4) \times \frac{1}{3} - 2 \times 1.5 \div 2 \times 4 \times \frac{1}{3} \\
 &= 16 - 2 \\
 &= 14(\text{cm}^3) \text{です。}
 \end{aligned}$$



ステップ② 5

(図1)では、立方体2個が完全に水の中に入っています。

よって、水の中に入っている立方体の体積は、 $10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2000 \text{ (cm}^3\text{)}$ です。

(図1)のときは、水の深さは16 cmになっています。

(図2)では、立方体2個は完全に水の中に入っているわけではありません。

14 cmの深さまでしか水の中に入っていないので、 $\underbrace{10 \times 10}_{\text{底面積}} \times 14 = 1400 \text{ (cm}^3\text{)}$ が、水の中に入っています。

(図1)のときは、 2000 cm^3 が水の中に入っていて、水の深さは16 cmになっていて、
(図2)のときは、 1400 cm^3 が水の中に入っていて、水の深さは14 cmになっています。

(図1)の方が、 $2000 - 1400 = 600 \text{ (cm}^3\text{)}$ だけ多く水の中に入っているので、水の深さは
 $16 - 14 = 2 \text{ (cm)}$ だけ深くなっているわけです。

容器に 600 cm^3 のおもりを入れると、水の深さは2 cmだけ増えることになりますから、
容器の底面積は、 $600 \div 2 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

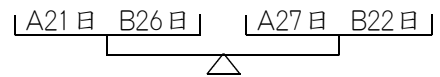
ステップ③ 1

- (1) 「Aが途中で5日休むと終わるまでに26日かかる」→ Aは $26-5=21$ (日)仕事をし、
Bは26日仕事をしました。

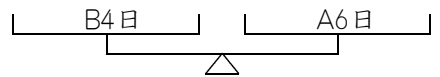
「Bが途中で5日休むと終わるまでに27日かかる」→ Aは27日仕事をし、Bは、
 $27-5=22$ (日)仕事をしました。

「Aが21日、Bが26日」仕事をしても仕事が終わるし、「Aが27日、Bが22日」仕事をしても仕事が終わります。

天びん図にすると、右の図のようになります。



左右両方のお皿から、Aを21日ぶん、Bを22日ぶん取りのぞくと、右の図のようになります。



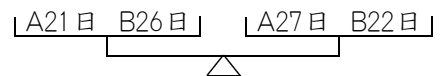
よって、Aが6日でする仕事量と、Bが4日でする仕事量が等しいことがわかりました。

その、等しい仕事量を(6と4の最小公倍数である)12にすると、Aは1日あたり $12 \div 6 = 2$ ずつ、Bは1日あたり $12 \div 4 = 3$ ずつ仕事をするようになりますから、AとBが1日にする仕事量の比は、**2:3**になります。

- (2) (1)で、AとBが1日にする仕事量の比は2:3であることがわかりました。

そこで、Aは1日に2ずつ、Bは1日に3ずつ仕事をすることにします。

また、この仕事は「Aが21日、Bが26日」仕事をすれば終わるような仕事量であることがわかっています。(「Aが27日、Bが22日」仕事をしても、終わります。)



よって、仕事量全体は、 $2 \times 21 + 3 \times 26 = 120$ です。
(または、 $2 \times 27 + 3 \times 22 = 120$ でもOKです。)

この、120の仕事を、Aが1日に2ずつ、Bが1日に3ずつ、休まずに仕事をするすると、仕事が終わるまでに、 $120 \div (2+3) = \mathbf{24}$ (日)かかります。

ステップ③ 2

(1) 1 台のポンプが1分あたりにくみ出す量を 1 とします。

3 台のポンプが 30 分でくみ出す量は, $\text{1} \times 3 \times 30 = \text{90}$ です。

はじめの水の量と, 30 分で流れこんできた水の量の合計が, 90 です。

はじめ + 30 分で流れこむ量 = 90 …(ア)

4 台のポンプで 18 分くみ出すと, $\text{1} \times 4 \times 18 = \text{72}$ の水をくみ出します。

はじめの水の量と, 18 分で流れこんできた水の量の合計が, 72 です。

はじめ + 18 分で流れこむ量 = 72 …(イ)

(ア)と(イ)をくらべると, $30 - 18 = 12$ (分)で, $\text{90} - \text{72} = \text{18}$ が流れこむのですから, 1 分あたり, $\text{18} \div 12 = \text{1.5}$ ずつ水が流れこむことになります。

1 台のポンプが1分あたりにくみ出す量を 1 とすると, 1 分間に流れこむ水の量は 1.5 になるので, その比は, $1 : 1.5 = \text{2} : \text{3}$ です。

(2) (1)で, 1 台のポンプが1分あたりにくみ出す量を 1 とすると, 1 分間に流れこむ水の量は 1.5 になることがわかりました。

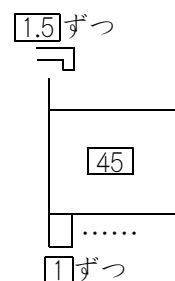
また, (ア)の はじめ + 30 分で流れこむ量 = 90 において, 30 分で流れこむ量は $\text{1.5} \times 30 = \text{45}$ ですから, はじめの水量は $\text{90} - \text{45} = \text{45}$ です。

問題の内容を整理すると, 右の図のようになります。

ポンプの台数を□台とし, 9分ちょうどでタンクが空になったとすると, $45 \div (1 \times \square - 1.5) = 9$ となります。

$45 \div 9 = 5$ $5 + 1.5 = 6.5$ $6.5 \div 1 = 6.5$ ですから, 6.5 台あれば, ちょうど9分でタンクを空にすることができます。

よって, 9分以内でタンクを空にするには, 少なくとも 7 台のポンプが必要です。



ステップ③ 3 (1)

24 を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ です。

よって、「24 でわる」というのは、「 $2 \times 2 \times 2 \times 3$ でわる」ということと同じです。

$2 \times 2 \times 2 \times 3$ には、2 と 3 という素数が登場しています。

そこで、 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ が、2 で何回わるか、3 で何回わるかを考えます。

2 で何回わるかは、右のようにします。

$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ (回), 2 でわれます。

$97 \div 3 = 32$ あまり 1 ですから、「2 で 97 回わる」ということは、「2 と 2 と 2」では、32 回わるできません。

$$\begin{array}{l} 100 \div 2 = 50 \\ 50 \div 2 = 25 \\ 25 \div 2 = 12 \text{ あまり } 1 \\ 12 \div 2 = 6 \\ 6 \div 2 = 3 \\ 3 \div 2 = 1 \text{ あまり } 1 \end{array}$$

次に、3 で何回わるかは、右のようにします。

$33 + 11 + 3 + 1 = 48$ (回), 3 でわれます。

$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ は、「2 と 2 と 2」で 32 回, 3 で 48 回わるのがわかりました。

$$\begin{array}{l} 100 \div 3 = 33 \text{ あまり } 1 \\ 33 \div 3 = 11 \\ 11 \div 3 = 3 \text{ あまり } 2 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

少ない方に合わせるので、 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ は、「2 と 2 と 2 と 3」で 32 回わるることになり、 $32 + 1 = 33$ (回目)に、商が整数でなくなることがわかりました。

ステップ③ 3 (2)

たとえば、「 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 90$ 」は、3で何回割られるでしょうか。
 $30 + 10 + 3 + 1 = 44$ (回), 3で割ることができる。

$90 \div 3 = 30$
$30 \div 3 = 10$
$10 \div 3 = 3 \text{ 残り } 1$
$3 \div 3 = 1$

では、「 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 91$ 」は、3で何回割られるでしょう。

この場合も、「 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 90$ 」の場合と同じく、3で44回わり切れます。

「 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 92$ 」の場合も、やはり3で44回わり切れます。

しかし、「 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 93$ 」の場合は、44回ではありません。もっとわり切れます。

このように、回数が増えるのは、「 $1 \times 2 \times \cdots$ 」の最後の数が3の倍数のときです。

「 $1 \times 2 \times 3$ 」のときは、3で1回のみわり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 6$ 」のときは、 $6 = 2 \times 3$ で、6は3を1個だけ持つと考えて、「 $1 \times 2 \times 3$ 」のときよりも1回アップして、 $1 + 1 = 2$ (回)わり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 9$ 」のときは、 $9 = 3 \times 3$ で、9は3を2個持つと考えて、「 $1 \times 2 \times \cdots \times 6$ 」のときよりも2回アップして、 $2 + 2 = 4$ (回)わり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 12$ 」のときは、 $12 = 2 \times 2 \times 3$ で、12は3を1個だけ持つと考えて、「 $1 \times 2 \times \cdots \times 9$ 」のときよりも1回アップして、 $4 + 1 = 5$ (回)わり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 15$ 」のときは、 $15 = 3 \times 5$ で、15は3を1個だけ持つと考えて、「 $1 \times 2 \times \cdots \times 12$ 」のときよりも1回アップして、 $5 + 1 = 6$ (回)わり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 18$ 」のときは、 $18 = 2 \times 3 \times 3$ で、18は3を2個持つと考えて、「 $1 \times 2 \times \cdots \times 15$ 」のときよりも2回アップして、 $6 + 2 = 8$ (回)わり切れます。

「 $1 \times 2 \times \cdots \times 21$ 」のときは、 $21 = 3 \times 7$ で、21は3を1個だけ持つと考えて、「 $1 \times 2 \times \cdots \times 18$ 」のときよりも1回アップして、 $8 + 1 = 9$ (回)わり切れます。

9回わり切れるということは、 $9 + 1 = 10$ (回目)にわり切れなくなるということです。から、この問題に合います。よって、まず21がaとして考えられる数です。

次の3の倍数である24になると、回数が変わってしまいます。

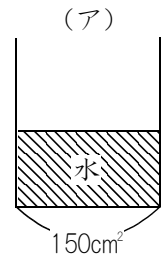
よって、aとして考えられるのは、21から、24の直前までの数です。

答えは、**21, 22, 23**になります。

ステップ③ 4 (1)

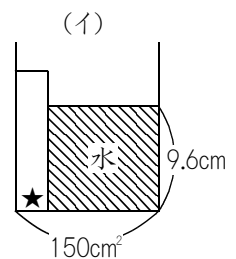
容器の底面積は、 $10 \times 15 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

棒を入れないときは、右の図(ア)のようになります。



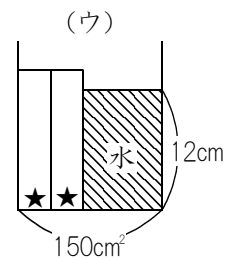
棒を1本だけ入れたときは、右の図(イ)のようになり、水の深さは 9.6 cm です。

図の★の部分は、棒1本の底面積です。



棒を2本入れたときは、右の図(ウ)のようになり、水の深さは 12 cm です。

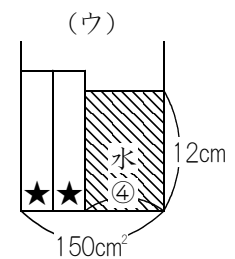
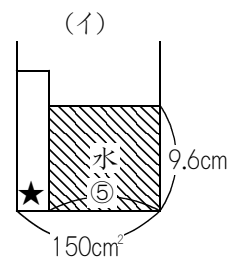
図の★★の部分は、棒2本の底面積です。



(イ)と(ウ)の図をくらべると、水の深さの比は、 $9.6 : 12 = 4 : 5$ です。

水の入っている部分の底面積の比は逆比になって、 $5 : 4$ です。

(イ)、(ウ)の水の入っている部分の底面積を、それぞれ ⑤、④とします。



すると、 $⑤ - ④ = ①$ が★にあたり、(イ)の図において、★が①で、水の入っている部分の底面積は⑤にあたりますから、容器の底面積は、 $① + ⑤ = ⑥$ にあたります。

よって、 150 cm^2 が⑥にあたるので、①あたり $150 \div 6 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$ です。

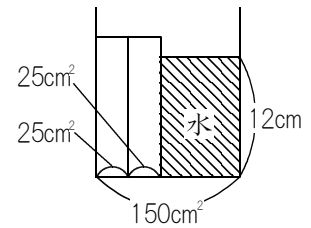
★は①にあたるので、棒の底面積は 25 cm^2 になり、棒の底面は正方形の形をしているので、 $25 = 5 \times 5$ ですから、棒の1辺の長さは 5 cm です。

ステップ③ 4 (2)

(1)で、棒の底面積は 25 cm^2 であることがわかりました。

よって、棒を2本入れたときの、水が入っている部分の底面積は、 $150 - 25 \times 2 = 100\text{ (cm}^2\text{)}$ です。

棒を2本入れたとき、水の深さは 12 cm になっているのですから、水の体積は、 $100 \times 12 = 1200\text{ (cm}^3\text{)}$ です。

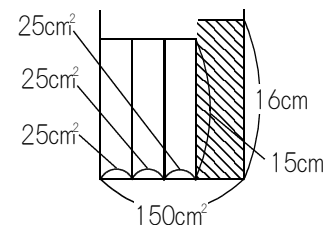
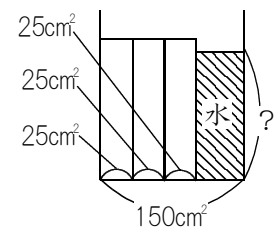


ステップ③ 4 (3)

棒を3本入れたとき、右の図のようになったとします。

水が入っている部分の底面積は、 $150 - 25 \times 3 = 75\text{ (cm}^2\text{)}$ で、水の体積は(2)で求めた通り 1200 cm^3 ですから、水の深さは、 $1200 \div 75 = 16\text{ (cm)}$ になります。

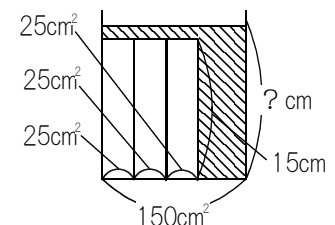
しかし、 16 cm がこの問題の答えではありません。なぜなら、棒の高さは 15 cm なので、それより水が深さが深いことになってしまい、右のような図になってしまって、おかしいからです。



この問題では、右の図のようになります。

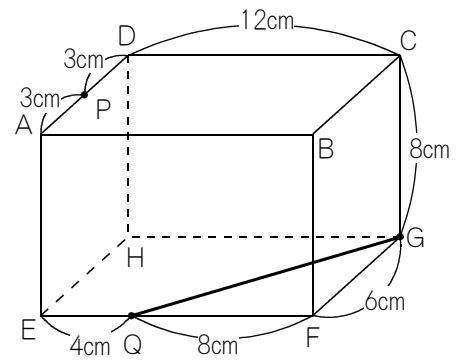
棒1本の体積は $25 \times 15 = 375\text{ (cm}^3\text{)}$ ですから、棒3本の体積は、 $375 \times 3 = 1125\text{ (cm}^3\text{)}$ です。

棒3本と水 1200 cm^3 の合計は $1125 + 1200 = 2325\text{ (cm}^3\text{)}$ で、底面積は 150 cm^2 ですから、?の長さは、 $2325 \div 150 = 15.5\text{ (cm)}$ です。



ステップ③ 5 (1)

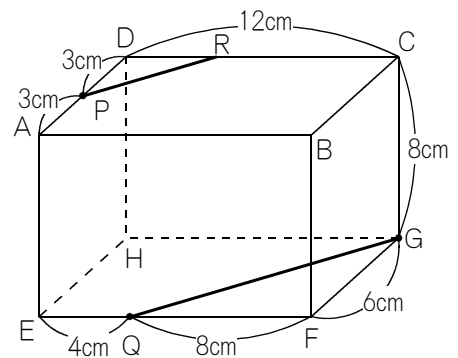
PQ, PGは立体の内部を通るので切り口の線を書くことはできませんが, QGは下の面を通るので書くことができます。



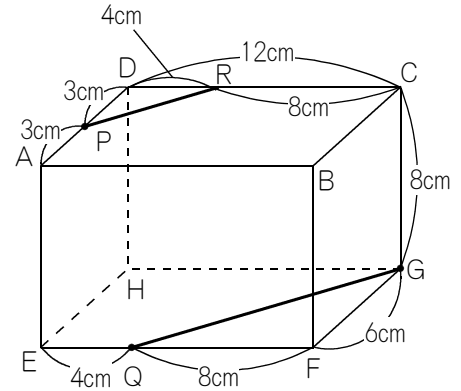
下の面と上の面は平行なので, 切り口の線も平行です。

QGは, 「たて:横」が $6:8=3:4$ ですから, PSも「たて:横」は $3:4$ です。

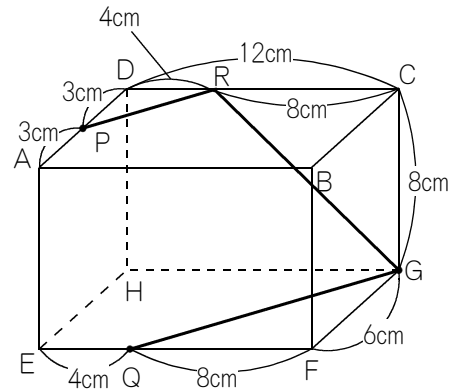
PSの「たて」は 3cm ですから, 「横」は 4cm になり, DRの長さは 4cm であることがわかりました。



CRは、 $12-4=8$ (cm)です。

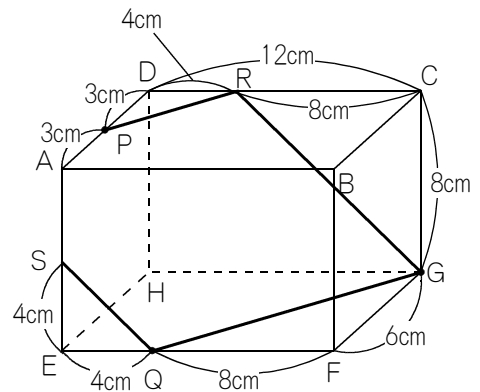


R Gの「たて：横」は、 $8:8=1:1$ です。



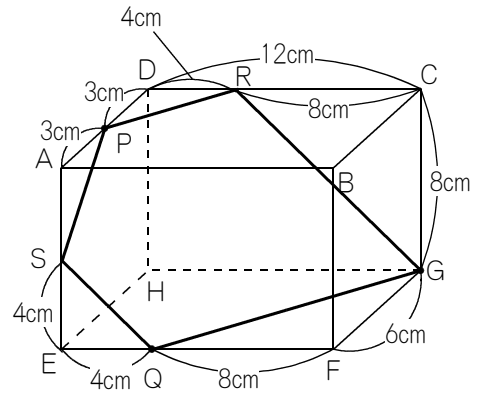
RGの「たて：横」は1：1ですから，SQの「たて：横」も1：1になり，「横」は4cmですから，「たて」も4cmです。

ESの長さが4cmであることがわかりました。

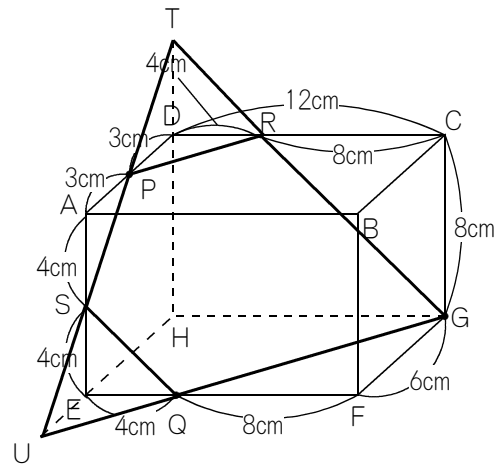


ステップ③ 5 (3)

P Sも左の面を通るので，切り口の線を書いてOKです。



右の図のようにのばして，点T，点Uとすると，頂点Dをふくむ立体の体積は，三角すいT U G Hから，三角すいT P R Dと，三角すいS U Q Eを引くことによって求めることができます。



右の図のしゃ線をつけた3つの三角形は合同です。

よって，T Dは4cm，U Eは3cmです。

三角すいT U G Hの体積は，

$$\underbrace{12 \times (3+6)}_{\text{底面積}} \div 2 \times \underbrace{(4+8)}_{\text{高さ}} \div 3 = 216 \text{ (cm}^3\text{)} \text{です。}$$

三角すいT P R Dと三角すいS U Q Eはどちらも，

$$3 \times 4 \div 2 \times 4 \div 3 = 8 \text{ (cm}^3\text{)} \text{です。}$$

よって答えは， $216 - 8 \times 2 = 200 \text{ (cm}^3\text{)}$ です。

